

Konzepte, Entwicklung und Struktur von digitalen Mathematiklernressourcen und deren Einsatz im Unterricht

ROBERT WEINHANDL; CHRISTINA KRENN; SELINA BALDINGER; MARKUS KAPPLMÜLLER; VIKTORIA RIEGLER; EDITH LINDENBAUER, LINZ

Im vorliegenden Konferenzbericht wird das Konzept, die Entwicklungsprozesse und die Materialstruktur von *FLINK in Mathe* erläutert, einer digitalen Materialiensammlung, die Lernmittel für Schüler:innen der Sekundarstufe I online zur Verfügung stellt. Dabei wird ein Bezug zum Design-Based-Research-Ansatz, anhand dessen die FLINK-Materialien entwickelt werden, und weiteren theoretischen Lehr- und Lernmodellen hergestellt. Außerdem werden in der Literatur angeführte Aspekte und Bedingungen für einen erfolgreichen Einsatz von digitalen Geräten und Materialien im Unterricht zusammengefasst und deren Berücksichtigung bei der Erstellung der FLINK-Materialien aufgezeigt. Im Anschluss wird dargelegt, inwiefern *FLINK in Mathe* eine Unterstützung für Lehrkräfte bei der Gestaltung eines gewinnbringenden Mathematikunterrichts unter Einsatz digitaler Geräte darstellen kann.

1. Einleitung

Die voranschreitende Digitalisierung führt zu Veränderungen, die auch einen Einfluss auf das Bildungswesen haben. Als Reaktion auf diese Entwicklung hat das österreichische Bildungsministerium (BMBWF) einen 8-Punkte-Plan entwickelt, laut dem alle Schüler:innen der Sekundarstufe I mit einem digitalen Gerät, also einem Notebook oder Tablet, ausgestattet werden (BMBWF, 2018; BMBWF, 2024a; OeAD, 2023). Durch diese Initiative soll eine Grundlage für technologiegestützten Unterricht geschaffen und ein Zugang zu digitaler Bildung für alle Schüler:innen ermöglicht werden (BMBWF, 2024b).

Die reine Präsenz von Technologie garantiert jedoch keine positiven Auswirkungen auf die Lernergebnisse der Schüler:innen. Der gewinnbringende Einsatz von digitalen Geräten im Mathematikunterricht stellt immer noch eine Herausforderung für Lehrkräfte dar (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015), da der bloße Zugang zu Informationen für ein nachhaltiges Lernen nicht ausreichend ist (Weigand, 2012a). Deshalb sollte im Rahmen einer sinnvollen Verwendung digitaler Geräte Wert auf Modellbildungen, offene Aufgaben und selbsttätiges Arbeiten gelegt werden (Langlotz et al., 2019).

FLINK in Mathe (siehe Kapitel 4) bietet eine Möglichkeit, das eigenständige digitale Arbeiten von Schüler:innen im Mathematikunterricht zu fördern. Dabei handelt es sich um eine Plattform, die digitale Materialien für Schüler:innen der Sekundarstufe I zur Verfügung stellt. Durch den Einsatz von Technologie bei den FLINK-Materialien ergibt sich ein Mehrwert gegenüber traditionellen Aufgaben mit Papier und Bleistift. Die Erstellung der Materialien erfolgt durch Mathematik-Lehramt-Studierende, erfahrene Lehrer:innen sowie Universitätsmitarbeiter:innen und orientiert sich an den Prinzipien von Design-Based-Research, wobei es sich um einen kontinuierlichen Prozess der Entwicklung, Umsetzung und Überarbeitung der digitalen Materialien handelt (Lindenbauer et al., 2024; Schmiedebach & Wegner, 2021).

Ziel dieses Artikels ist es, das Konzept sowie die Entstehungsprozesse und Struktur der Materialien von *FLINK in Mathe* und damit eine Einsatzmöglichkeit von digitalen Geräten im Mathematikunterricht näher zu erläutern. Dabei soll auch auf die Entwicklung der Materialien anhand der Design-Based-Research Prinzipien und die in der Literatur zu findenden Gelingensbedingungen für den Einsatz von Technologie im Unterricht eingegangen werden.

2. Literaturreview

In diesem Abschnitt erfolgt eine kompakte Darstellung ausgewählter Literatur zum selbstgesteuerten Lernen im technologiegestützten Mathematikunterricht. Im Fokus steht dabei die Begünstigung mathematischer Begriffsbildung, adaptiven Übens und entdeckenden Lernens durch ein adäquates Design digitaler Lernumgebungen, da es sich dabei um zentrale Aspekte des FLINK-Projekts handelt.

2.1 Mathematische Begriffsbildung mithilfe digitaler Materialien

Wie Lindner und Reichenberger (2015) anhand verschiedener Unterrichtsbeispiele demonstrieren, bietet der Computereinsatz vielfältige Möglichkeiten, die Begriffsbildung bei Lernenden zu unterstützen. Besonders grundlegende Begriffe, sogenannte Leitbegriffe (Vollrath, 1984), entwickeln sich im Laufe langfristiger mathematischer Lehrgänge idealerweise zu tragfähigen mentalen Konstrukten und bilden die Grobstruktur im individuellen Verständnis der Lernenden. Die Herausbildung solcher Leitbegriffe bedarf einer Vielzahl sinnstiftender Assoziationen mit Prototypen, Aufgaben und Kontexten. Entsprechend dem Spiralprinzip muss der Mathematikunterricht wiederkehrende Gelegenheiten für die Weiterentwicklung, Präzisierung und Anwendung grundlegender Begriffe bieten (Lindner & Reichenberger, 2015).

In der Mathematikdidaktik werden üblicherweise drei Komponenten eines Begriffs berücksichtigt. Den Kern eines mathematischen Konzepts bildet der Begriffsinhalt, also dessen charakterisierende Eigenschaften. Der Begriffsumfang beschreibt die Gesamtheit der mathematischen Objekte, die das jeweilige Konzept umfasst. Die Erarbeitung des Begriffsumfangs steht in enger Verbindung zur Abgrenzung gegenüber verwandten Konzepten. Im Begriffsnetz sind schließlich die Beziehungen zu anderen mathematischen Konzepten enthalten (Weigand, 2012b).

Aufbauend auf Vollrath (1984) unterscheidet Weigand (2012b) vier Stufen des Begriffsverständnisses, die in einem optimalen Lernprozess zu durchlaufen sind: (1) das intuitive Begriffsverständnis, das vor allem auf dem Vorwissen der Lernenden basiert und nicht zwingend eine explizite Benennung des betreffenden mathematischen Konzepts voraussetzt; (2) das inhaltliche Begriffsverständnis, das durch die schrittweise Erarbeitung der verschiedenen Eigenschaften eines Konzepts erreicht wird; (3) das integrierte Begriffsverständnis, das durch Einbettung des neuen Konzepts in bestehende mathematische Wissensstrukturen und die Herstellung entsprechender Verknüpfungen zu Ober- und Unterbegriffen entstehen kann; und (4) das formale Begriffsverständnis, welches das Nachvollziehen der erlernten Eigenschaften anhand der mathematischen Definition voraussetzt, ein selbstständiges Operieren mit dem Konzept zulässt und gegebenenfalls einfache Beweisführungen ermöglicht. Laut Lindner und Reichenberger (2015) ist es sinnvoll, digitale Lernmaterialien auf dieses Stufenmodell abzustimmen.

Der Technologieeinsatz eröffnet im Mathematikunterricht viele Potentiale. Mit Blick auf die Begriffsbildung ermöglicht die Zuhilfenahme digitaler Werkzeuge eine Konzentration des Lernens auf konzeptionelle Zusammenhänge (Barzel et al., 2005). Morgan und Kynigos (2014) betonen dabei vor allem das Potenzial der Verknüpfung mehrerer Repräsentationen mathematischer Objekte für die Bereicherung des konzeptionellen Verständnisses von Schüler:innen. Da die Repräsentationen mit Hilfe von Technologie einfach variiert werden können, wird die Bildung eines eingeschränkten Prototypen bei Schüler:innen vermieden. Indem Technologien die individuellen Handlungsspielräume im Sinne entdeckenden Lernens erweitern, bieten sie außerdem die Möglichkeit, den mathematischen Lehrgang stärker konstruktivistisch zu gestalten (Barzel et al., 2005).

2.2 Entdeckendes Lernen im digitalen Zeitalter

Es gibt vielerlei Variationen technologiegestützten Mathematiklernens. Laut Roth (2015) existieren drei wichtige Spielarten des Technologieeinsatzes im Fach Mathematik: Computerwerkzeuge ohne Vorstrukturierung, interaktive Arbeitsblätter und dynamische Lernumgebungen. Die erstgenannte ist die

ursprünglichste Einsatzform von Technologie. Neben programmierbaren Taschenrechnern kommen am häufigsten dynamische Geometrie-Software, Computer-Algebra-Systeme sowie Tabellenkalkulationsprogramme zum Einsatz. Diese bieten die Möglichkeit, aufwändige Konstruktionen und algorithmische Rechenprozesse auszulagern. Gleichzeitig hat diese Einsatzform den Nachteil, dass sie eine Reihe technologischer Fähigkeiten und damit eine relativ zeitintensive Einarbeitung voraussetzt. Hier besticht die zweite Einsatzform, in welcher Schüler:innen mit vorgefertigten, meist browsergestützten dynamischen Arbeitsblättern (Applets) arbeiten. Roth (2015) beschreibt diese als „Experimentier- und Erkundungsumgebungen für spezifische Fragestellungen des Mathematikunterrichts“ (S. 5). Diese sind in der Regel ausreichend intuitiv gestaltet, sodass Nutzer:innen keiner separaten Einschulung bedürfen. Während das Erlernen mathematischer Inhalte im Vordergrund steht, werden Nutzer:innen begleitend dazu auch mit technologischen Fähigkeiten vertraut. Roth (2015) betont jedoch, dass sich einzelne Applets nur für einen beiläufigen Technologieeinsatz eignen. Die drittgenannte Einsatzform, das Lernen in digitalen Lernumgebungen, bietet hingegen den Vorteil, dass dort Applets oder ähnliche digitale Materialien zur Verfügung stehen, die einem einheitlichen didaktischen Konzept folgen und auf einer gemeinsamen digitalen Oberfläche aufbereitet und untereinander vernetzt sind. Solche Lernumgebungen sind in der Regel besonders benutzer:innenfreundlich gestaltet und eignen sich vor allem für selbstständiges und entdeckendes Lernen (Roth, 2015).

Wie jede Form des Mathematikunterrichts sollte sich, so Leuders und Büchter (2009), auch der Unterricht mit digitalen Technologien an didaktisch-pädagogischen Qualitätsmerkmalen orientieren, zum Beispiel an den Kriterien ‚guten Unterrichts‘ nach Meyer (2003). Auch hier bildet das aktiv-entdeckende Lernen (Bruner, 1961; Freudenthal, 1976; Winter, 1989) einen zentralen Aspekt, bei dem Schüler:innen auf Basis einer konstruktivistischen Auffassung (Boyle, 1997) angeregt werden, ihr Wissen aktiv und eigenständig zu konstruieren. Reiss und Hammer (2021) betonen die Bedeutung eines ausgewogenen Verhältnisses zwischen informativem und entdeckendem Lernen für effektiven Wissenserwerb. Während informatives Lernen häufig lehrer:innenzentriert ist und einfache Aufgaben umfasst (Reiss & Hammer, 2021), sollten digitale Aufgaben so gestaltet sein, dass sie entdeckendes Lernen fördern. Diese Art des Lernens erlaubt es den Lernenden mitunter durch offene Aufgabenstellungen, eigenständig Wissen zu erarbeiten (Leuders, 2014). Im Rahmen des entdeckenden Lernens werden den Schüler:innen keine vorgefertigten Antworten oder Lösungswege präsentiert; vielmehr sind sie dazu angehalten, den Inhalt selbst zu erforschen und eigene Herangehensweisen zu entwickeln, um Lösungen zu finden (Reiss & Hammer, 2021). Kritiker:innen des entdeckenden Lernens argumentieren, dass dieser Prozess für Schüler:innen herausfordernd sein kann, da sie ihre Lernziele eigenständig definieren müssen (Mayer, 2004). Zudem erfordert das Navigieren in digitalen Lernumgebungen eine hohe Selbstregulierung, was es schwierig machen kann, den Überblick über frühere Erkenntnisse zu behalten (Leuders, 2014). Aus diesem Grund empfiehlt Kollosche (2017), den Lernprozess in einem gewissen Maß zu strukturieren und zu unterstützen, um eine effektive Vermittlung zwischen dem digitalen Werkzeug und den Schüler:innen zu gewährleisten.

Nach Schmidt-Thieme und Weigand (2015) ist die Vernetzung zwischen traditionellen und digitalen Unterrichtsmedien eine zentrale Gelingensbedingung für einen effektiven und zeitgemäßen Mathematikunterricht. So ist der positive Effekt auf den Lernerfolg der Schüler:innen größer, wenn im Unterricht zusätzlich analoges Material zum Einsatz kommt (Hillmayr et al., 2017). Die Aufgabe des Mathematikunterrichts besteht daher darin, eine Verbindung zwischen den traditionellen und digitalen Medien zu schaffen (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015). Insgesamt kann der Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht eine sinnstiftende und gewinnbringende Ergänzung zu papierbasierten Lernumgebungen und Schulbüchern sein (Reinhold et al., 2018).

Generell kann der Einsatz von Technologie zu einer Veränderung der Struktur des Mathematikunterrichts führen, da die Schüler:innen in digitalen Lernumgebungen in der Regel selbstständiger und freier arbeiten, was die Unterrichtsatmosphäre positiv beeinflussen kann. Der

Technologieeinsatz erleichtert das Aufbrechen klassischer Unterrichtssituationen und die Umsetzung alternativer Instruktionsformen (Reinhold et al., 2018). Wie hier beschrieben, setzt effektives Lernen in digitalen Lernumgebungen jedoch ein hohes Maß an Selbststeuerung und Reflexionsvermögen voraus.

2.3 Designkriterien digitaler Lernumgebungen

Laut einigen Studien erzielen Schüler:innen, die im Mathematikunterricht mit digitalen Geräten arbeiten, bessere Leistungen (Hillmayr et al., 2017; Reinhold et al., 2018). Die positiven Effekte zeigen sich insbesondere dann, wenn die Schüler:innen differenziertes Feedback zu ihren Lösungen erhalten, die Lernprogramme adaptiv sind und individuell an den Lernstand der Schüler:innen angepasst werden können. So erhöht sich beispielsweise die Lösungsrate von nachfolgenden Aufgaben, wenn zuvor eine Lösungshilfe abgerufen wurde (Reinhold et al., 2018). Weiters kann der Einsatz von Technologie zu einer Steigerung der Motivation und Leistungsbereitschaft der Schüler:innen beitragen (Hillmayr et al., 2017). Laut Reinhold et al. (2018) bearbeiten Schüler:innen mit digitalen Geräten in einer Unterrichtseinheit mehr Aufgaben als in einem herkömmlichen Unterrichtssetting. Um diese positiven Effekte tatsächlich zu erzielen, sind mitunter Qualität und Design der verwendeten Lernmaterialien entscheidend. In diesem Abschnitt soll darauf näher eingegangen werden.

Mathematik soll nicht ausschließlich als abstrakte und schulgebundene Disziplin betrachtet werden. Stattdessen sind Anwendbarkeit und Funktionalität im Alltag zu betonen. Durch die Auswahl und Gestaltung von Aufgaben, die auf authentischen Alltagserfahrungen basieren, können Schüler:innen ein umfassenderes und realitätsnahes Bild von Mathematik entwickeln (Leuders & Büchter, 2009). Gleichzeitig fördert kollaboratives Lernen, bei dem durch ständigen Austausch und das Begründen mathematischer Überlegungen Wissen vertieft wird, die soziale Komponente des Lernens. Digitale Lernumgebungen sollten daher darauf ausgelegt sein, die Kommunikation über mathematische Konzepte zu stärken und vielfältige Perspektiven zu integrieren (Apostolopoulou et al., 2014).

Daten aus den PISA- und TIMSS-Studien zeigen, dass Lehrkräfte gerne auf ‘gute Aufgaben’ zurückgreifen, die nach diesen Prinzipien gestaltet sind (Leuders & Büchter, 2009). Wenn diese Aufgaben in digitale Lernumgebungen eingebettet werden, stellen sie umfangreiche Hilfsmittel zur Unterstützung eines qualitativ hochwertigen Unterrichts dar. Solche Hilfsmittel umfassen personalisiertes und automatisiertes Feedback, das individuelle Förderung auf unterschiedlichen Leistungsniveaus ermöglicht (Roth, 2022). Digitale Geräte ermöglichen eine maßgeschneiderte Gestaltung von Lernpfaden und -umgebungen, um den individuellen Bedürfnissen aller Schüler:innen gerecht zu werden. Die Aufgabenkomplexität wird an den aktuellen Wissensstand der Lernenden angepasst, um sicherzustellen, dass sie weder über- noch unterfordert sind (Rezat, 2020). Zusätzlich fördert automatisiertes Feedback, welches auf die Antworten der Schüler:innen reagiert, das personalisierte Lernen (Barana & Marchisio, 2019). Durch die Individualisierung der Lernpfade mithilfe von digitalen Ressourcen können komplexe Unterrichtsszenarien effizient und effektiv gestaltet werden, was die Bedeutung digitaler Mathematikaufgaben im modernen Unterricht unterstreicht (Leuders & Büchter, 2009).

Vollrath und Roth (2012) stellen an unterrichtstaugliche digitale Lernumgebungen die Ansprüche, dass diese einen inhaltlichen roten Faden aufweisen, fachlich korrekt sind, selbstständiges Arbeiten und speziell entdeckendes Lernen für Lernende oder Lerngruppen ermöglichen, reflexives und kommunikatives Arbeiten fördern, offen und differenzierend gestaltet sind und optionale Hilfestellungen und Wege der Ergebnissicherung enthalten.

Während in der Literatur viele theoretische Empfehlungen zum Design von digitalen Materialien zu finden sind, brachte die empirische Forschung bisher nur wenig Konkretes hervor. Chiu und Churchill (2015) identifizieren in einer qualitativen Studie, basierend auf einem Design-Based-Research Ansatz, bestimmte Kriterien für das Design digitaler Mathematik-Lernressourcen zur individuellen Entwicklung

mathematischer Konzepte. Die relevanten Lerninhalte sollten gut erfassbar im Vordergrund stehen, während Detailinformationen in Form längerer Texte oder Lösungsanleitungen so weit wie möglich ausgespart werden sollten. Das Design digitaler Materialien sollte den Aufbau eines Netzwerks von Kernbotschaften fördern. Dazu sollten zum einen verschiedene Repräsentationen mathematischer Konzepte aufbereitet und verglichen werden. Zum anderen sollte die Auswirkung der Veränderung von Parametern in verschiedenen Repräsentationsformen (simultan) veranschaulicht werden. Laut Dörr et al. (2015) sei es aber nicht ausreichend, unterschiedliche Repräsentationsformen eines mathematischen Konzepts simultan zu präsentieren. Es bedarf gezielter Verknüpfungen zwischen den jeweiligen Repräsentationen auf der algebraisch-symbolischen, numerisch-tabellarischen und graphisch-visuellen Ebene. Digitale Veranschaulichungsmöglichkeiten wie etwa dynamische Farbkodierung sollten eingesetzt werden, um die Aufmerksamkeit der Nutzer:innen zu lenken und Aspekte verschiedener Repräsentationen zu vernetzen. Digitale Lernmaterialien sollten die kognitive Kapazität der Nutzer:innen berücksichtigen, indem die Aspekte eines mathematischen Konzepts nicht auf einmal, sondern gruppiert dargestellt werden, was anhand von Layout und Farbcodes realisiert werden kann (Chiu & Churchill, 2015).

Die potentiellen Vorteile entdeckenden Lernens mit interaktiver Mathematiksoftware sind in der Literatur in großer Fülle festgehalten (Barzel & Klinger, 2022; Greefrath & Siller, 2022). Weigand und Weth (2002) warnen allerdings vor der Gefahr der Verständnisillusion, die bei Lernenden entstehen kann, wenn digitale Materialien unreflektiert zum Einsatz kommen. Beispielsweise ermöglicht die Verwendung digitaler Werkzeuge häufig die Lösung von Aufgaben nach dem Trial-and-Error-Prinzip. Zwar führt ein solches Vorgehen, das oft nur mit Technologie realisierbar ist, nicht selten zu richtigen Ergebnissen, doch wird dabei meist kein ursächliches Verständnis entwickelt. Bei Weigand und Weth (2002) ist diesbezüglich vom „Handlungsaktionismus“ (S. 57) vieler Lernender die Rede, was eine oberflächliche, unreflektierte und ziellose Arbeitsform beschreibt.

Vollrath und Roth (2012) raten daher zur Reduktion der Lernmaterialien auf die wesentlichen, für das eigenständige Begreifen notwendigen Elemente und Handlungsoptionen. Dörr et al. (2015) sehen im digitalen Lernpfad eine „praxisnahe Kombination aus entdeckendem und rezeptivem Lernen“ (S. 138). Zugunsten eines tieferen Begriffsverständnisses sei es daher oft lohnenswert, durch Einschränkung der technischen Möglichkeiten Tempo aus dem Lernprozess zu nehmen und so einer zu oberflächlichen Auseinandersetzung entgegenzuwirken, ohne den Lernenden dabei die Chance zu nehmen, ihren Lernprozess selbstständig zu steuern.

3. Theoretischer Hintergrund

Das FLINK-Projekt ist gut fundiert durch mehrere theoretische Modelle. Neben dem methodologischen Design-Based-Research-Ansatz (DBR), in dessen Rahmen die Materialentwicklung in FLINK gebettet ist, berücksichtigen wir eine Reihe theoretischer Lehr- und Lernmodelle. In diesem Abschnitt werden diese knapp umrissen und mit dem FLINK-Projekt in Beziehung gesetzt.

3.1 Design-Based-Research

Die gesamte Entwicklung der Lernplattform geschieht entlang der Prinzipien des Design-Based-Research (DBR) Ansatzes. DBR ist eine der wichtigsten und geläufigsten Methoden, um die Etablierung von Bildungsinnovationen empirisch zu begleiten (Bell et al., 2003; Godino et al., 2013). Empirie und Praxis stehen dabei in einem reziproken Verhältnis. In der Theorie geschieht DBR nach Schmiedebach und Wegner (2021) in drei Phasen. In der ersten Phase wird das Unterrichtsmaterial auf Basis bestehender Lehr- und Lerntheorien designt, entwickelt, evaluiert und überarbeitet. Dieser Zyklus wird so oft wiederholt, bis das Ergebnis aus Sicht der Designer:innen zufriedenstellend ist beziehungsweise bis die Iteration zu keiner weiteren Veränderung führt. In der zweiten Phase erfolgt die praktische

Erprobung der entwickelten Materialien im Schulalltag unter wissenschaftlicher Beobachtung (Reinmann, 2005). Die Ergebnisse dieser Beobachtungen bilden schließlich einerseits den Ausgangspunkt für die erneute Weiterentwicklung des Unterrichtsmaterials und andererseits den Impuls für die Ausschärfung der angewandten beziehungsweise die Generierung neuer Theorien. Der hier skizzierte Entwicklungsprozess wird im Kapitel 4 konkretisiert. Im Folgenden werden theoretische Modelle dargelegt, die bei der Entwicklung von FLINK berücksichtigt wurden und werden.

3.2 Variation Theory

Basierend auf einer konstruktivistischen Auffassung von Lehren und Lernen sieht Leung (2017) im Aufgabendesign eine der Haupttätigkeiten einer Lehrkraft. „The word ‘design’ carries a meaning of accomplishing goals in a particular environment satisfying a set of requirements or subject to a set of constraints; it is a strategic approach (roadmap) towards achieving a certain expectation” (Leung, 2017, S. 4). Ziel des Aufgabendesigns in technologiereichen Lernumgebungen sei es, das Entdecken, (Re-)Konstruieren und Erklären von mathematischen Konzepten durch die Verwendung von Tools zu ermöglichen und zu fördern (Leung, 2017).

Der Gedanke, dass effektives Lernen mitunter darin besteht, neue Blickwinkel auf das zu erlernende Phänomen kennenzulernen, wird in der Variation Theory of Learning (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015) abgebildet. Jedes mathematische Konzept verfügt über gewisse Aspekte, die aus didaktischer Sicht besonders relevant für das Verstehen dieses Konzepts sind. Die Variation Theory sieht vor, die Aufmerksamkeit auf bestimmte Aspekte eines mathematischen Konzepts zu lenken, indem man sie systematisch verändert. Umgekehrt können die zu fokussierenden Aspekte des Konzepts unverändert bleiben, während andere Aspekte variiert werden (Marton, 2015). Mit anderen Worten sollen Lernende durch die Beobachtung gezielter Variation verstehen, was das zu begreifende mathematische Konzept ausmacht (Marton & Booth, 1997). Um etwa beim Konzept Rechteck die Aufmerksamkeit auf den Aspekt Umfang zu lenken, kann es sinnvoll sein, die Lernenden mit einer Reihe von Rechtecken mit konstantem Umfang und variierendem Flächeninhalt zu konfrontieren. Alternativ ist die Präsentation von Rechtecken mit konstantem Flächeninhalt und variierendem Umfang denkbar. Die Variation Theory setzt demnach auf die Tätigkeit des systematischen Vergleichens zum Erlernen neuer Konzepte (Kullberg et al., 2017). Ebendiese Tätigkeit lässt sich aus unserer Sicht äußerst gut durch Technologieeinsatz im Mathematikunterricht umsetzen, etwa mithilfe von vorstrukturierten dynamischen Applets.

3.3 Mathematics Digital Boundary Object

Die Aufgabe von Designer:innen bei der Gestaltung von digitalen Lernmaterialien besteht darin, mathematische Inhalte mithilfe von Technologie schüler:innengerecht aufzubereiten. Diese Herausforderung kann mit der Theorie der Boundary Objects (Star & Griesemer, 1989) in Verbindung gebracht werden. Diese bezieht sich ursprünglich auf Objekte, die dem Zweck dienen, Fachwissen einem nicht einschlägig gebildeten Publikum zugänglich zu machen. Star und Griesemer (1989) stellen zwei grundlegende Ansprüche an Boundary Objects. Auf der einen Seite müssen sie plastisch sein, also angemessene Interpretationsspielräume bieten, sodass sie in bestehende Wissensstrukturen eingebettet werden können. Auf der anderen Seite müssen sie einen invarianten Informationskern beinhalten, der robust gegenüber Verzerrungen im Zuge der individuellen Wissenskonstruktion ist.

Leung (2017) spezialisiert dieses etablierte Konzept im Kontext digitalen Mathematiklernens. Ein Mathematics Digital Boundary Object (MDBO) ist demnach ein digitales Artefakt, das durch die Bereitstellung ‘virtueller Realitäten’ als Brücke (Vermittler/Übersetzer) zwischen mathematischen Welten eingesetzt wird. Im schulischen Kontext kommt beispielsweise eine digitale Lernumgebung wie FLINK als MDBO zum Einsatz, um zwischen der Welt der Fachmathematik und der Welt des

Lernkollektivs (Schulklasse) zu vermitteln beziehungsweise mathematische Konzepte zu ‘übersetzen’ (Leung, 2017).

3.4 Artifact-Centric Activity Theory

Die indirekte Beziehung zwischen den Designer:innen von Lernumgebungen und den Lernenden als Nutzer:innen wird sehr treffend von der Artifact-Centric Activity Theory (ACAT) abgebildet (Ladel & Kortenamp, 2016). Sie stellt eine Weiterentwicklung der prominenten Activity Theory von Vygotsky (1978) und Leont’ev (1978) dar, angepasst an die neuen Bedingungen für das Mathematiklernen und -lehren im technologiereichen Klassenzimmer. Lernen wird dabei als Prozess verstanden, der eingebettet in bestimmte soziale Rahmenbedingungen, das Human Activity System (Engeström, 2009), geschieht. Neben dem Artefakt (digitales Tool) im Zentrum dieses Systems, definieren Ladel und Kortenamp (2016) vier weitere Knotenpunkte, nämlich das Subjekt (Lernende:r) und die Group (Lernkollektiv inkl. Lehrkraft) auf der einen Seite und das Objekt (mathematisches Konzept) und die Designregeln (Interaktionsrahmen in der digitalen Umgebung) auf der anderen Seite. Wie in Abbildung 1 dargestellt, findet das Lernen in Form von Internalisierungs- und Externalisierungsprozessen statt. Dabei internalisiert das Subjekt das durch das Artefakt repräsentierte mathematische Wissen. Unter Internalisierung ist hierbei die individuelle (Re-)Konstruktion des jeweiligen mathematischen Konzepts anhand der digitalen Repräsentation zu verstehen. In die entgegengesetzte Richtung externalisiert das Subjekt sein in Form von mentalen Repräsentationen vorhandenes Vorwissen, indem es mit dem Artefakt interagiert.

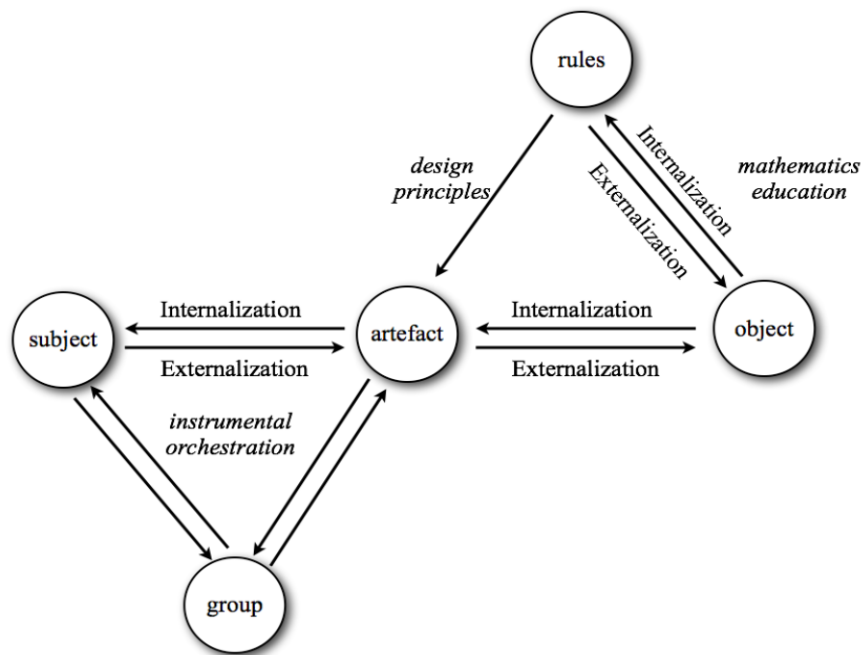


Abb. 1: Modell der Artifact-Centric Activity Theory (Ladel & Kortenamp, 2016, S. 30)

Wie eingangs erwähnt, hebt die ACAT (Ladel & Kortenamp, 2016) dabei das indirekte Verhältnis zwischen den Lernenden beziehungsweise User:innen (subject) und den Designer:innen von digitalen Tools in innovativer Form hervor. Diese Beziehung besteht insofern, als Designer:innen auf Basis mathematischer beziehungsweise fachdidaktischer Überlegungen gewisse Designregeln (rules) festlegen, um zu bestimmen, welche Interaktion mit dem virtuellen mathematischen Objekt am gewinnbringendsten hinsichtlich des Lernziels erscheint. Diese Designregeln manifestieren sich wiederum in konkreten Designprinzipien, welche die Entwicklung des digitalen Tools leiten.

In unserer Arbeit repräsentieren die in FLINK enthaltenen Applets die digitalen Artefakte. Die Designregeln sind das Ergebnis von empirisch geleiteten Entscheidungen der Materialdesigner:innen hinsichtlich der didaktischen Reduktion mathematischer Inhalte und der Möglichkeiten für exploratives Lernen. Diese werden konkret in den Designprinzipien realisiert, beispielsweise bezogen auf den Grad der Manipulierbarkeit von mathematischen Objekten oder die ‘Bewegungsfreiheit’ in und zwischen den Applets. Auf die Klarstellung der theoretischen Perspektive folgt nun eine genauere Betrachtung bestehender Forschungsergebnisse zum digitalen Mathematiklernen und zum Materialdesign.

4. FLINK in Mathe

FLINK in Mathe steht für „Förderung Lernender durch interaktive Materialien für einen nachhaltigen Kompetenzerwerb“ und bietet digitale Lernmittel für Schüler:innen der Sekundarstufe I, die darauf abzielen, die Umsetzung des österreichische Mathematiklehrplans durch den gezielten Einsatz von Technologie im Unterricht zu unterstützen. Im folgenden Kapitel soll die Entwicklung der Materialien im Sinne des Workflows und Designs auf Basis der theoretischen Grundlagen erläutert und vertieft werden, um den Zusammenhang zwischen Theorie und Praxis im Kontext der Mathematikdidaktik deutlich zu machen.

4.1 Konzept der Materialien

FLINK in Mathe zielt darauf ab, hochwertige und theoriegeleitete digitale Materialien für Schüler:innen der Sekundarstufe I bereitzustellen (Johannes Kepler Universität Linz, o. J.). Das FLINK-Projekt bietet dynamische Lernumgebungen im Sinne von Roth (2015), die entwickelt werden, um den technologischen Mehrwert gegenüber traditionellen Papier-und-Bleistift-Aufgaben optimal zu nutzen. Dabei soll eine vorstrukturierte und digitale „Experimentier- und Erkundungsumgebung“ (Roth, 2015, S. 5) für den Mathematikunterricht geschaffen werden, die durch technologische Funktionen wie automatisiertes Feedback, dynamische Visualisierungen und zufällige Aufgabenstellung bereichert wird (Lindenbauer et al., 2024). Diese Funktionen machen die FLINK-Materialien zu einer benutzerfreundlichen digitalen Lernumgebung, die sich für selbständiges Lernen eignet. Dennoch ersetzen die bereitgestellten Aufgaben nicht den traditionellen Unterricht, sondern sollen nach den Vorschlägen von Schmiedt-Thieme und Weigand (2015) sowie Hillmayr et al. (2017) den analogen Unterricht sinnvoll als zusätzliche Methode ergänzen.

Die Struktur der FLINK-Materialien folgt dem österreichischen Mathematiklehrplan der Sekundarstufe I, das vier inhaltliche Bereiche umfasst: 1) Zahlen und Maße, 2) Variablen und Funktionen, 3) Figuren und Körper sowie 4) Daten und Zufall (Bundesministerium für Unterricht und Kunst, 2021). Diese Bereiche werden für FLINK weiter in kleinere Unterthemen beziehungsweise Aspekte eines mathematischen Themas für die jeweilige Klassenstufe aufgeteilt und in sogenannten GeoGebra-Büchern zusammengefasst (Johannes Kepler Universität Linz, o. J.).

4.2 Entstehungsprozess des Materials

Die FLINK-Materialien werden durch eine enge Zusammenarbeit von Mathematik-Lehramt-Studierenden, erfahrenen Lehrer:innen sowie in der Lehrer:innenausbildung tätige Universitätsmitarbeiter:innen entwickelt und gestaltet. Alle Beteiligten bringen ihre Expertise in verschiedenen Arbeitsprozessen ein, um sicherzustellen, dass die Materialien auf soliden theoretischen Grundlagen basieren und den aktuellen pädagogischen und didaktischen Anforderungen entsprechen. Der Arbeitsprozess wird in mehrere Teams unterteilt: Das Didaktikteam, welches aus Lehramtsstudierenden (aus höheren Bachelorsemestern und Mastersemestern) besteht, ist verantwortlich für die Entwicklung von Materialien zu spezifischen mathematischen Aspekten, welche auf gründlicher Literaturrecherche basieren. Sie erstellen ein Skript zur weiteren Bearbeitung und

praktischen Umsetzung durch das Autorenteam, welches ebenfalls aus Lehramtsstudierenden besteht. Die vom Didaktikteam entwickelten Konzepte werden zu Beginn mit Lehrkräften besprochen und anhand verschiedener Kriterien, wie etwa der Vorteile des Technologieeinsatzes oder fachdidaktischer Aspekte, evaluiert, überarbeitet und verfeinert. Danach setzt das Autorenteam diese Materialien in der dynamischen Geometrie-Software GeoGebra um. Nach zwei oder drei Runden des Review- und Überarbeitungsprozesses, bei dem die Materialien erneut mit Lehrkräften sowie Universitätsmitarbeitenden der Lehrer:innenausbildung besprochen und optimiert werden, ist das FLINK-Buch bereit zur Veröffentlichung. Auch nach der Veröffentlichung bleibt das Team in Kontakt mit Lehrkräften, die das Material im Unterricht testen und wertvolles Feedback sowie Evaluierungen bereitstellen (Lindenbauer et al., 2024). Dieser kontinuierliche Prozess der theoriegeleiteten Entwicklung, Umsetzung, Evaluierung und möglichen Überarbeitung orientiert sich an dem Design-Based-Research-Modell, wie es von Schmiedeback und Wegner (2021) beschrieben wurde.

4.3 Materialstruktur

Die FLINK-Materialien sind so konzipiert, dass sie durch den Einsatz von Technologie sowohl die Begriffsbildung als auch das Üben von Fertigkeiten fördern. In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik wird der Unterricht oft in drei Phasen des Lernens und zwei Phasen des Beurteilens nach Büchter und Leuders (2009) unterteilt. Die drei Lernphasen beinhalten 1) Erkunden, Entdecken, Erfinden; 2) Sichern, Systematisieren; sowie 3) Üben, Verbinden, Wiederholen. Die zwei Beurteilungsphasen umfassen 4) Diagnostizieren und 5) Beurteilen (Büchter & Leuders, 2009). Diese Einteilung dient als Modell für die Gestaltung von Unterrichtseinheiten. Die FLINK-Materialien berücksichtigen vorrangig die ersten drei Phasen des Lernens, nämlich das Entdecken, Systematisieren sowie Üben und Wiederholen neuer oder bereits bekannter Inhalte. Anhand dieser Kriterien entstanden zwei Kategorien, die in jedem FLINK-Buch vorhanden sind: „Entdecken Material“ und „Üben Material“, Aufgaben zum Systematisieren sind hierbei integriert (Lindenbauer et al., 2024). Diese Kategorien ermöglichen es den Schüler:innen, mathematische Konzepte zu erforschen und zu erarbeiten sowie ihre erlernten Fähigkeiten zu trainieren und zu festigen. Neben diesen beiden Hauptkategorien beinhalten FLINK-Bücher gelegentlich auch eine Zusammenfassung der theoretischen Inhalte durch Lernvideos oder Applets mit Anleitungen zur Nutzung der mathematischen Software in ebendiesem Themengebiet (Johannes Kepler Universität Linz, o. J.).

„Entdecken Materialien“

Ein Beispiel eines FLINK-Buches aus der 1. Klasse im Bereich ‘Entdecken’ beschäftigt sich mit dem Thema ‚Quader und Würfel – Netz‘ (<https://www.geogebra.org/m/hqeaawte#material/zhehr2b>). Dieses Buch bietet sieben interaktive digitale Arbeitsblätter zum Erforschen und vier digitale Arbeitsblätter zum Üben, die darauf abzielen, den Schüler:innen spielerisch die Eigenschaften von Netzen von Quadern und Würfeln näherzubringen und die erworbenen Konzepte zu festigen. Durch dieses interaktive Arbeiten mit den digitalen Materialien wird das räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler:innen gefördert, wodurch ein tieferes Verständnis für Geometrie entwickelt werden kann. In Abbildung 2 wird eine Entdecken-Aktivität gezeigt, bei der die Schüler:innen die verschiedenen Würfelnetze studieren können. Interaktive Elemente wie Schieberegler und bewegbare 3D-Ansichten ermöglichen es den Lernenden, im Sinne der Variation Theory die Netze dynamisch zu visualisieren und zu beobachten, wie sich die Darstellung der Netze falten und entfalten lässt. Eine systematische Variation von Beispielen, bei der die relevanten Eigenschaften eines Konzepts hervorgehoben und Unterschiede sichtbar gemacht werden, ist laut Kullberg et al. (2017) zentral für den Lernprozess. Zusätzlich wird eine logische Farbkodierung, wie von Chiu und Churchill (2015) vorgeschlagen, gezielt eingesetzt, um gegenüberliegende Flächen zu markieren. Dies fördert nicht nur das räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler:innen, sondern lenkt auch ihre Aufmerksamkeit auf die relevanten

Aspekte des zu lernenden mathematischen Konstrukts, was zu einem tieferen Verständnis und einer besseren Verankerung des Wissens beitragen soll.

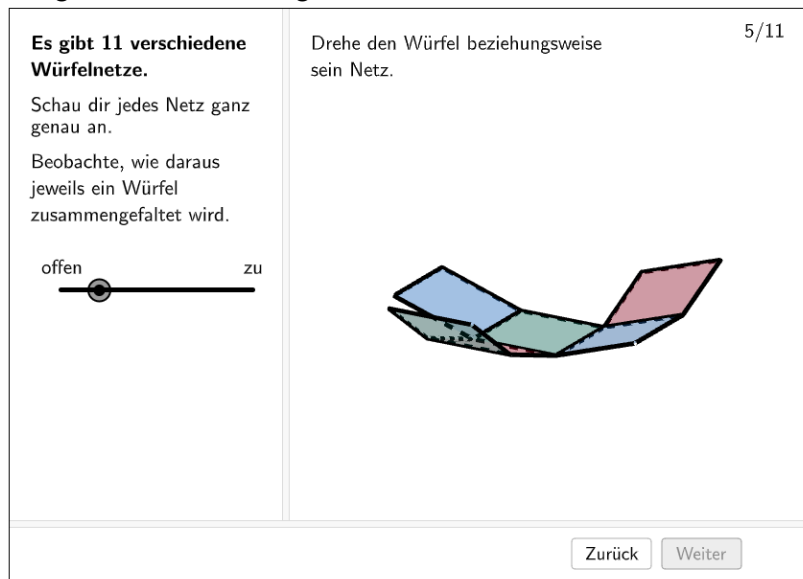


Abb. 2: Prototypisches Entdecken-Applet zum Thema ‚Verschiedene Würfelnetze‘ (<https://www.geogebra.org/m/hqeaawte#material/vpvkh5gy>)

Basierend auf den Empfehlungen von Kollösche (2017), den entdeckenden Lernprozess so zu strukturieren, dass entdeckendes Lernen nicht als Herausforderung durch zu hohe Selbstregulierung gesehen wird, werden die FLINK-Entdecken-Applets immer durch begleitende Fragestellungen ergänzt. Diese Fragen unterstützen die Schüler:innen dabei, das erlernte Wissen zu systematisieren und in bestehende Wissensstrukturen zu integrieren. Die Fragen sind in offene Fragen und Multiple-Choice-Fragen unterteilt, um unterschiedliche Denkprozesse anzuregen und zu fördern. Ein Beispiel für eine offene Frage ist in Abbildung 3 zu sehen, bei der die Schüler:innen nicht nur ihr mathematisches Verständnis anwenden, sondern auch ihre Fähigkeit zur Begründung entwickeln sollen. Sie werden aufgefordert, zu erklären, warum eine bestimmte Darstellung eines Würfelnetzes nicht korrekt ist. Durch die automatische Bereitstellung einer möglichen Antwort können die Schüler:innen selbstständig überprüfen, ob ihre Argumentation stichhaltig ist, und bekommen einen Einblick, wie eine prototypische Antwort aussehen könnte. Die Strukturierung und Unterstützung des entdeckenden Lernens durch gezielte Fragestellungen, die den Entdeckungsprozess leiten, fördert laut Kollösche (2017) die effektive Integration neuer Konzepte und hilft den Lernenden, ihre Erkenntnisse sicher und systematisch zu erweitern.

Jona hat versucht eine zwölfte Möglichkeit zu entwickeln das Netz eines Würfels mit der Kantenlänge a zu zeichnen.

Beschreibe, warum Jonas Zeichnung kein Netz darstellt.

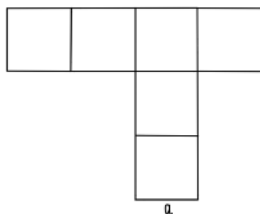
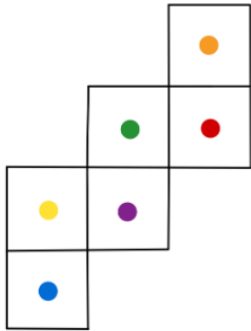


Abb. 3: Prototypische begleitende offene Frage zum Thema ‚Verschiedene Würfelnetze‘ (<https://www.geogebra.org/m/hqeaawte#material/vpvkh5gy>)

Ein Beispiel für eine Multiple-Choice Frage (siehe Abbildung 4) erfordert von den Schüler:innen lediglich die Identifizierung von gegenüberliegenden Flächen. Solche Fragen bieten eine effektive Möglichkeit, die erlernten mathematischen Konzepte zu überprüfen und zu festigen, was besonders in späteren Prüfungssituationen von Vorteil ist.

Betrachte das Würfelnetz.
Die einzelnen Begrenzungsflächen sind mit farbigen Punkten markiert.



Welche Fläche liegt der lila Fläche (●) gegenüber?

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ ●

B ☐ ●

C ☐ ●

D ☐ ●

E ☐ ●

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Abb. 4: Prototypische begleitende Multiple-Choice-Frage zum Thema ‚Verschiedene Würfelnetze‘
(<https://www.geogebra.org/m/hqeaawte#material/vpvkh5gy>)

Ein weiteres FLINK-Buch im Bereich ‚Entdecken‘ für die 2. Klasse behandelt das Thema ‚Größter gemeinsamer Teiler‘ (<https://www.geogebra.org/m/jfm5cddq#material/mkakbmr>). Das Buch enthält fünf „Entdecken Materialien“, die es Schüler:innen ermöglichen, spielerisch und auf eine kindgerechte Weise die grundlegenden Eigenschaften von Teilern zu erkunden und gemäß den Empfehlungen zur Förderung der Begriffsbildung von Lindner und Reichenberger (2015) den Begriff des größten gemeinsamen Teilers zu entwickeln. Dabei erfolgt eine Auseinandersetzung sowohl mit dem Begriffsinhalt, welcher die charakteristischen Merkmale des größten gemeinsamen Teilers umfasst, als auch mit dessen Einbettung in das Begriffsnetz, das die Beziehungen zu anderen mathematischen Konzepten wie dem gemeinsamen Teiler beschreibt (Weigand, 2012b). Abbildung 5 veranschaulicht eine Aktivität, in der Schüler:innen mithilfe interaktiver Visualisierungen und Animationen eigenständig den Begriff des größten gemeinsamen Teilers erforschen und schrittweise ihr inhaltliches Begriffsverständnis für diesen neuen Begriff entwickeln können. Nachdem die Eigenschaften erforscht wurden, werden die Schüler:innen dazu aufgefordert, Merktex te zu vervollständigen, um ihren selbstgesteuerten Wissenserwerb zu unterstützen. Automatische Rückmeldungen, die Möglichkeit, sich Lösungen anzeigen zu lassen, sowie zielgerichtete Hinweise unterstützen die Schüler:innen beim selbstgesteuerten und individualisierten Lernen (Roth, 2022). Darüber hinaus tragen diese Methoden laut Reinhold et al. (2018) dazu bei, durch einen sinnvollen Technologieinsatz bessere mathematische Leistungen zu erzielen. Zudem sind auch in diesem Buch begleitende Fragestellungen enthalten, die den Entdeckungsprozess leiten und unterstützen sollen.

Nimm mit Jule die gemeinsamen Teiler der Zahlen 28 und 42 unter die Lupe.
Ziehe dazu die Lupe über die Teiler der Zahl 28.

2/4

14 ist **ein gemeinsamer** Teiler der Zahlen 42 und 28.

$T_{28} = \{ 1, 2, 4, 7, 14, 28 \}$



Zieh mich!



$T_{42} = \{ 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 \}$

$T_{28,42} = \{ 1, 2, 7, 14 \}$

Neue Aufgabe

↔

Abb. 5: Prototypisches Entdecken-Applet zum Thema ‚Größter gemeinsame Teiler‘
<https://www.geogebra.org/m/jfm5cddq#material/mkakbmrB>

„Üben Materialien“

Die Aktivitäten in den FLINK-Büchern im Bereich ‘Üben’ beinhalten digitale Ressourcen, die darauf abzielen, Fertigkeiten zu trainieren und mathematische Konzepte zu festigen. Diese Materialien umfassen verschiedene geschlossene Aufgabenformate wie, Multiple-Choice-Fragen, Drag-and-Drop-Aufgaben, Dropdown-Aufgaben und grafische Aufgaben. Zudem bieten sie die von Roth (2022) empfohlenen Hilfsmittel zur Unterstützung qualitativ hochwertigen Unterrichts. Wie von Vollrath und Roth (2012) für digitale Lernumgebungen mit Fokus auf selbstständiges Arbeiten und entdeckendes Lernen vorgeschlagen, werden Hinweise eingebaut, die auf die spezifischen Fehler der Schüler:innen zugeschnitten sind, um den selbstgesteuerten Lernprozess zu unterstützen. Eine automatische Auswertung der Fehler und sofortiges Feedback helfen dabei, Fehlvorstellungen systematisch anzugehen und personalisiertes Lernen zu ermöglichen (Barana & Marchisio, 2019). Wenn Schüler:innen eine Aufgabe nicht lösen können, wird am Ende die korrekte Lösung präsentiert, damit sie ihren Lernprozess eigenständig überprüfen können. Die Übungsmaterialien bieten zudem einen Zähler für richtig gelöste Aufgaben, der es den Lernenden ermöglicht, ihren eigenen Lernfortschritt zu überwachen und ihre individuellen Lernziele zu verfolgen. Die Randomisierung vieler Übungsaktivitäten in den FLINK-Materialien ermöglicht es den Schüler:innen, eigenständig und vielfältig zu üben, was einen deutlichen digitalen Vorteil darstellt und, wie von Reinhold et al. (2018) gezeigt, die Bearbeitung von mehr Aufgaben als im herkömmlichen Unterrichtssettings fördert.

Abbildung 6 und 7 zeigen ein Beispiel für eine Übungsaktivität, bei der die Schüler:innen Brüche auf einem Zahlenstrahl korrekt ablesen und in Eingabefelder eingeben müssen (<https://www.geogebra.org/m/cvcfbjy#material/gdbrepb7>). Bei Fehlversuchen erhalten sie angepasste Hinweise und eine farbliche sowie schriftlich Rückmeldung zur Korrektheit ihrer Antwort (siehe Abbildung 6). Dadurch können die Schüler:innen schnell erkennen, ob sie die Aufgabe richtig gelöst haben oder nicht. Nach drei Versuchen wird schließlich die Lösung angezeigt (siehe Abbildung 7).

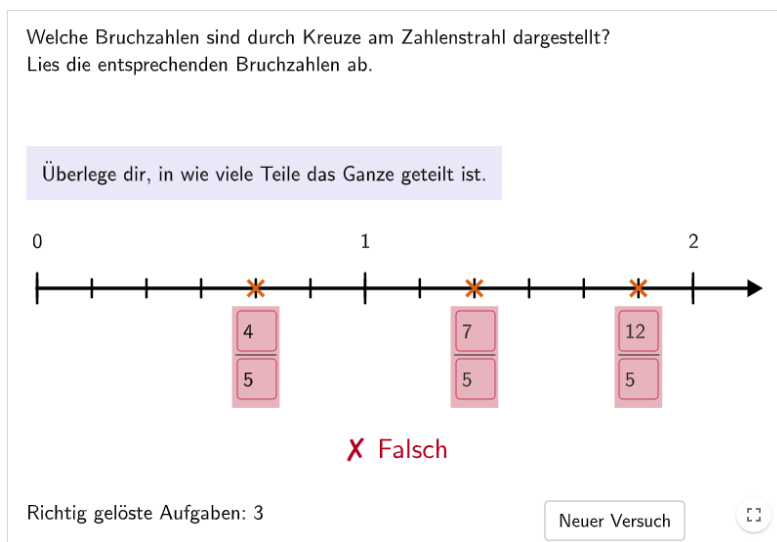


Abb. 6: Hinweis und Rückmeldung für ein prototypisches Üben-Applet zum Thema ‚Brüche am Zahlenstrahl ablesen‘
(<https://www.geogebra.org/m/cvcfbjy#material/gdbrepb7>)

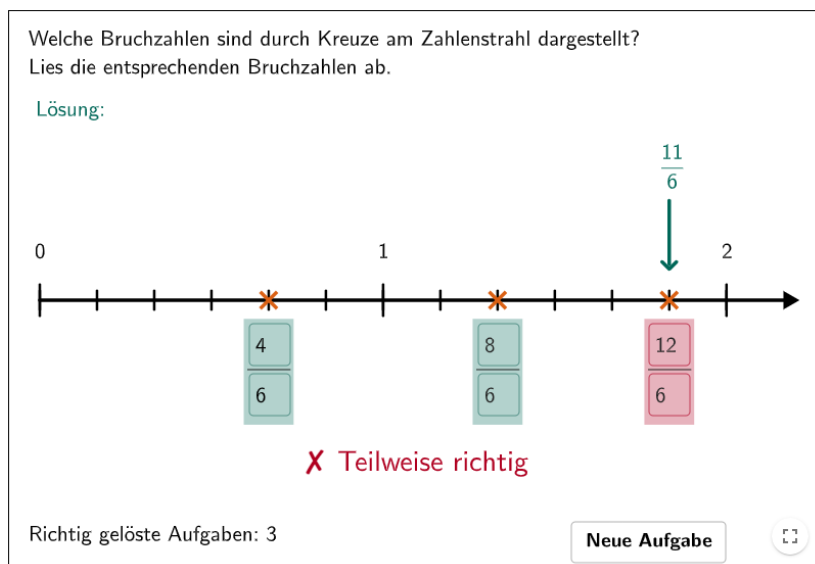


Abb. 7: Lösung und Rückmeldung für ein prototypisches Üben-Applet zum Thema ‚Brüche am Zahlenstrahl ablesen‘
(<https://www.geogebra.org/m/cvcfbjy#material/gdbrepb7>)

5. Fazit

Das Projekt *FLINK in Mathe* in seiner heutigen Form ist das Resultat eines jahrelangen Wechselspiels zwischen Theorie, Empirie und Praxis. Orientiert an den Prinzipien von Design-Based-Research (Schmiedebach & Wegner, 2021) erfolgt die Materialentwicklung in aufwändigen Evaluationszyklen, an denen neben den Designer:innen auch Didaktiker:innen und praktizierende Lehrkräfte beteiligt sind.

Die Entdecken-Applets der FLINK-Bücher bilden aus theoretischer Sicht MDBOs (Leung, 2017). Sie dienen dem Transfer mathematischen Wissens von der Welt mathematischer Expert:innen (Designer:innen, Didaktiker:innen) in die Welt der Schüler:innen. Die mathematischen Konzepte werden dabei nicht als starre formale Konstrukte präsentiert, sondern als interaktiv erfahrbar. Diese Plastizität soll gewährleisten, dass Schüler:innen die neuen Eindrücke in ihre bestehenden mathematischen Wissensstrukturen einordnen können. Sie wird etwa an der Veränderbarkeit geometrischer Figuren durch die Veränderung von Parametern, die Bedienung von Schiebereglern oder

das Ziehen und Drehen von Objekten deutlich. Allerdings ermöglichen die Applets, wie von Leung (2017) vorgesehen, nicht jede beliebige Manipulation. Der zu vermittelnde Informationskern bleibt stets invariant und im besten Fall robust gegenüber verzerrten Wahrnehmungen. Wie auch die ACAT (Ladel & Kortenkamp, 2016) verdeutlicht, nehmen Designer:innen durch ihre didaktischen Entscheidungen indirekt Einfluss auf das lernende Individuum. Zusätzlich zu den Instruktionsweisen der Lehrkraft entscheiden sie durch die Gestaltung der Lernumgebung über die Offenheit der Aufgabenstellungen, das Maß an Vorstrukturierung und die Handlungsfreiheit innerhalb der Applets.

Die theoretischen Grundlagen, die von Roth (2015) und anderen Wissenschaftler:innen (Kollasche, 2017; Leuders, 2014; Linder & Reichenberger, 2015; Reinhold et al., 2018; Weingard, 2012b) formuliert wurden, haben maßgeblich dazu beigetragen, die Vorteile digitaler Lernmethoden gegenüber traditionellen Papier-und-Bleistift-Aufgaben herauszustellen. Die FLINK-Materialien nutzen automatisiertes Feedback, dynamische Visualisierungen und randomisierte Aufgabenstellungen, um eine benutzer:innenfreundliche und effektive Lernumgebung zu schaffen, die das selbständige Lernen fördert. Es wird daher empfohlen, die theoretischen und praktischen Erkenntnisse aus diesem Projekt in die Entwicklung zukünftiger digitaler Lernumgebungen einzubeziehen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die FLINK-Bücher ein vielversprechendes Beispiel für digitale Materialien, die im Mathematikunterricht zum Einsatz kommen können, darstellen. Durch die enge Verbindung von Theorie und Praxis bieten sie wertvolle Impulse für die zukünftige Gestaltung technologiegestützter Bildungsangebote. So bieten die FLINK-Materialien eine Unterstützung für Lehrkräfte bei der Gestaltung eines Mathematikunterrichts, in dem die aufgrund des 8-Punkte-Plans für die Schüler:innen zur Verfügung gestellten digitalen Geräte sinnvoll eingesetzt werden können.

Literatur

- Apostolopoulou, D., Panagiotakopoulos, C., & Karatrantou, A. (2014). Theories of Learning in Math and Science Educational Software. In P. Politis, I. Karasavvidis, & C., Karagiannidis (Hrsg.), *Research on e-Learning and ICT in Education: Technological, Pedagogical and Instructional Perspectives* (S. 25–36). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6501-0_3
- Barana, A., & Marchisio, M. (2019). Strategies of formative assessment enacted through automatic assessment in blended modality. In U. T. Jankvist (Hrsg.), *CERME11: Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 4041–4048). Freudenthal Group & Freudenthal Institute. <https://iris.unito.it/handle/2318/1731995>
- Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2005). *Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht*. Cornelsen.
- Barzel, B., & Klinger, M. (2022). Digitale Mathematikwerkzeuge. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht, F., & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 91–108). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7>
- Bell, P. Brophy, S. P., Hoadley, C., & Hsi, S. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational researcher*, 32(1), 5–8.
- Boyle, T. (1997). *Designing multimedia*. Prentice Hall.
- Bruner, J. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31, 21–32.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF]. (2018). *Masterplan Digitalisierung*. <https://www.bmbwf.gv.at/Ministerium/Presse/Masterplan-Digitalisierung.html> (Zugriff: 20.06.2024).
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF]. (2024a). *Digitale Schule*. <https://digitaleschule.gv.at/digitale-endgerate-fur-schulerinnen-und-schuler/> (Zugriff: 20.06.2024).

- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF]. (2024b). *8-Punkte-Plan*. <https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/zrp/dibi/8punkte.html> (Zugriff: 20.06.2024).
- Bundesministerium für Unterricht und Kunst. (2021). *Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen*. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568> (Zugriff: 20.06.2024).
- Büchter, A., & Leuders, T. (2009). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Cornelsen Scriptor.
- Chiu, T. K., & Churchill, D. (2015). Exploring the characteristics of an optimal design of digital materials for concept learning in mathematics: Multimedia learning and variation theory. *Computers & Education*, 82, 280–291.
- Dörr, J., Rolfes, T., Schmerenbeck, D., & Weber, R. (2015). Gestaltungselemente in Lernpfaden zur Unterstützung des selbstgesteuerten Lernens: Ein Unterrichtsversuch am Beispiel der Einführung in die Differentialrechnung. In J. Roth, E. Süss-Stepanicik & H. Wiesner (Hrsg.), *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel* (S. 137–156). Springer Spektrum.
- Engeström, Y. (2009). Expansive learning: Toward an activity-theoretical reconceptualization. In K. Illeris (Hrsg.), *Contemporary theories of learning. Learning theorists ... in their own words* (S. 53–73). Routledge.
- Freudenthal, H. (1976). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Klett.
- Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2810–2819). Middle East Technical University.
- Greefrath, G., & Siller, H.-S. (2022). Mathematische Modelle und Digitalisierung – Forschungsstand, Chancen und Beispiele. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht, & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_14
- Hillmayr, D., Reinhold, F., Ziernwald, L., & Reiss, K. (2017). *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe. Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit*. Waxmann. <https://doi.org/10.25656/01:15482>
- Johannes Kepler University Linz. (o. J.). *FLINK in Mathe*. <https://www.jku.at/flink-in-mathe/> (Zugriff: 08.08.2022)
- Kollosche, D. (2017). Entdeckendes Lernen: Eine Problematisierung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2(38), 209–237. <https://doi.org/10.1007/s13138-017-0116-x>
- Kullberg, A., Runesson Kempe, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics?. *ZDM Mathematics Education*, 49, 559–569. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4>
- Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2016). Artifact-Centric Activity Theory – A framework for the analysis of the design and use of virtual manipulatives. *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives*, 25–40. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_2
- Langlotz, H., Stachniss-Carp, S., & Weller, H. (2019). Mathematikunterricht mit digitalen Werkzeugen – Eine persönliche Bilanz von 25 Jahren Einsatz im Unterricht. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht. Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 205–2018). Springer Spektrum.
- Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Prentice-Hall.
- Leuders, T., & Büchter, A. (2009). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln – Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Cornelsen Scriptor.
- Leuders, T. (2014). Entdeckendes Lernen – Produktives Üben. *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung Und Kompetenzaufbau Im Unterricht Der Sek. I Und II*, 236–263.

- Leung, A. (2017). Exploring Techno-Pedagogic Task Design in the Mathematics Classroom. In A. Leung, & A. Baccaglini-Frank (Hrsg.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks. Potential and Pitfalls* (S. 3–16). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_1
- Lindenbauer, E., Infanger, E. M., & Lavicza, Z. (2024). Enhancing Mathematics Education through Collaborative Digital Material Design: Lessons from a National Project. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 12(2), 276–296.
- Lindner, A., & Reichenberger, S. (2015). Begriffsbildung mithilfe von Lernpfaden. In J. Roth, E. Süss-Stepanicik, & H. Wiesner (Hrsg.), *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel* (S. 84–95). Springer Spektrum.
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Erlbaum Associates Publishers.
- Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. *The American Psychologist*, 59(1), 14–19. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.59.1.14>
- Meyer, H. (2003). Zehn Merkmale guten Unterrichts. *Empirische Befunde und didaktische Ratschläge. Pädagogik*, 10, 36–43.
- OeAD. (2023). *Geräteinformationen*. <https://digitaleslernen.oead.at/de/fuer-schulen/geraeteinformationen> (Zugriff: 20.06.2024)
- Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Reiss, K., & Richter-Gebert, J. (2018). *Tablet-PCs im Mathematikunterricht in der Klasse 6. Ergebnisse des Forschungsprojektes ALICE: Bruchrechnen*. Waxmann.
- Reinmann, G. (2005). Innovation ohne Forschung? Ein Plädoyer für Design-Based Research-Ansatz in der Lehr-Lernforschung. *Unterrichtswissenschaft* 33(1), 52–69. <https://doi.org/10.25656/01:5787>
- Reiss, K., & Hammer, C. (2021). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Birkhäuser. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-65429-0>
- Rezat, S. (2020). Mathematiklernen mit digitalen Schulbüchern im Spannungsfeld zwischen Individualisierung und Kooperation. *Mobile Medien im Schulkontext*, 41, 199–213. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29039-9_10
- Roth, J. (2015). Lernpfade – Definition, Gestaltungskriterien und Unterrichtseinsatz. In J. Roth, E. Süss-Stepanicik, & H. Wiesner (Hrsg.), *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel* (S. 3–25). Springer Spektrum.
- Roth, J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht, & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109–136). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_6
- Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 461–490). Springer.
- Schmiedebach, M., & Wegner, C. (2021). Design-Based Research als Ansatz zur Lösung praxisrelevanter Probleme in der fachdidaktischen Forschung. *Bildungsforschung*, (2), 1–10. <https://doi.org/10.25656/01:23920>
- Star, L. S., & Griesemer, J. R. (1989). Institutional ecology, ‘translations’ and boundary objects: Amateurs and professional in Berkeley’s museum of vertebrate zoology, 1907–1930. *Social Studies of Science*, 19(3), 387–420.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Klett.
- Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Weigand, H.-G. (2012a). Fünf Thesen zum Einsatz digitaler Technologien im zukünftigen Mathematikunterricht. In W. Blum, R. Borromeo Ferri & K. Maaß (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität* (S. 315–324). Vieweg+Teubner.
- Weigand, H.-G. (2012b). Begriffe lehren – Begriffe lernen. *Mathematik lehren*, 172, 2–9.

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen*. Spektrum Akademischer Verlag.

Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Vieweg.

Verfasser

Robert Weinhandl
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education - Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 68
4040 Linz
robert.weinhandl@jku.at

Selina Baldinger
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education - Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 68
4040 Linz
selina.baldinger@jku.at

Viktoria Riegler
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education - Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 68
4040 Linz
viktoriam.riegler@jku.at

Christina Krenn
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education - Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 68
4040 Linz
christina.krenn@jku.at

Markus Kapplmüller
Johannes Kepler Universität Linz
School of Education - Abteilung für MINT Didaktik
Altenberger Straße 68
4040 Linz
markus.kapplmueller@jku.at

Edith Lindenbauer
Pädagogische Hochschule Oberösterreich
Fachbereich Mathematikdidaktik
Kaplanhofstraße 40
4020 Linz
edith.lindenbauer@ph-ooe.at